数理解析研究所講究録
第1658巻 2009年 228-256

論理・集合・実数・物理・測定：量子集合論と量子力学の観測問題*

名古屋大学・大学院情報科学研究科　小澤 正直†

1 はじめに

物理学の対象，いわゆる物理系は，観測可能量または物理量と呼ばれる観測可能な量的性質を備えていると考えられている．また，物理量の値は実数であり，それぞれの測定に際しては，測定精度と独立の一つの実数値が定まっていて，測定の精度に応じて詳しい数値が得られると考えられている．これらのことは，古典力学ではほぼ自明のことであるが，量子力学では特有の困難があり，観測問題や隠れたパラメータの存在問題に関連して様々に議論されてきた．本稿では，これらの問題に数学基礎論の方法を利用する新しいアプローチを紹介することを目的としている．

はじめに，観測問題になぜ数学基礎論の方法が有効かということについて簡単に述べておこう．観測問題という言葉で，明確に定式化されているとは言い難いいくつかの問題が括られているが，基本的な問題は各測定によって測定値が定まる，または，定まるべきであるという根本的仮定の正当性を吟味するということにある．

たとえば，電子は位置と運動量という観測可能量を持ち，任意の状態においてどちらを測定することもできるとされている．位置をプラスマイナス 10^{-6} m の精度で測定する装置で測定すれば，真の測定値からプラスマイナス 10^{-6} m 以内にある小数点以下6桁までの測定値が得られる．もし，より精度の高い装置で測定すれば，小数点以下のもっと先までの数値が得られると想定され，それらは，整合的でなければならない．このことは，その値が正確には予測できないということとは矛盾しない．つまり，どの測定にも真の測定値と呼ばれる実数が対応していることが想定され，実際の測定値は真の測定値と測定装置の精度という両方の概念と整合的であるような数直線のある区間によって表現される．

一方，その時刻に位置の代わりに運動量を測定することもでき，運動量に関しても事情は全く同じである．すると，与えられた電子に対して，与えられた時刻に位置を測定すると得られるはずの測定値と，同じ時刻に運動量を測定すると得られるはずの測定値が共に定まっていると結論できるように思われる．しかし，不確定性原理から予想されるように，ある妥当な仮定の下で，すべての物理量の値が測定に先立って一義的に定まっていると考えること

*Logic, sets, real numbers, physics, and measurements

†Masanao Ozawa, Graduate School of Information Science, Nagoya University

は不可能であることが証明されている [5, 8]．量子力学の解釈を扱う分野では，この証明の仮定の妥当性が様々な形で吟味されているが，一般の物理学者の反応には，物理量の観測可能性自体を否定するようなものも見受けられる．

「物理量」という言葉と「測定値」という言葉があるように，「量」という概念と「値」という概念は区別されてきた．量子力学が現れるまでは，「量」とは対象の状態を独立変数とする「関数」のことで，その量の「値」は，「関数値」のことであるとされてきた．一方，量子力学では，「量」は線形作用素で表現され，「値」にはその固有値が対応する．これらを総合する数学的概念として，作用素環の理論は数学の重要な一分野をなす．つまり，定められた対象の量の全体がなす代数構造を公理的に定めるものとして抽象的な C*-代数の概念があり，それが可換ならば，対象の状態と極大イデアルが対応し，任意の量は状態を変数とする関数で表現される．一方，非可換なものは，あるヒルベルト空間上の線形作用素の集まりで表現され，可能な値の集合はスペクトルで表され，測定値に対する確率的予言が，スペクトル上の確率測度で表現される．このように，作用素環の理論は古典力学的な量と量子力学的な量を総合する便利な数学理論であるが，そこから量と値の関係について直接的な理解を得ることは難しい．つまり，これは，構造的理論であり，量の集まりのもつ構造を仮定して，そこから帰結を導く理論であるが，量と値の関係に関するどのような仮定からその構造が導かれるかということは明らかではない．

そのような事態と比較するために，実数の理論について考えてみよう．実数に関する構造的理論としては，例えば，順序体の理論がある．完備順序体が実数体と同型であるという定理によって，実数体の構造的特徴付けがなされる．しかし，このような構造理論は，その理論が1階の述語理論では記述できないため，背景として仮定されている集合論から独立にその理論を完結させることができない．完備順序体の理論では，完備性の定義は，代数構造や順序構造だけでなく，順序体の部分集合に関する集合の概念を必要とするので，順序体の理論は1階の述語理論で記述できるが，完備順序体の理論は1階の述語理論で記述することができない．

そもそも完備順序体として実数を定義したというよりは，有理数体の完備化として実数を定義し，出来上がった構造が完備順序体として一意的であることが示されたというほうが自然である．ここでは，完備という言葉は多義的で，完備順序体という時の完備性は順序に関する完備性[1] を意味し，有理数体の完備化という時は，順序に関する完備性と距離または一様構造に関する完備性の両方を意味し，両者は同値である．一般に，アルキメデス的順序体では，両者は同値であるが，非アルキメデス的順序体では，一様完備性と順序完備性は同等ではない[2]．有理数体の順序完備化を定義する有名な方法は，Dedekind 切断であり，実数体とは完備順序体であるという構造的理解に対して，実数とは有理数体の Dedekind 切断であるとい

[1] (i) 任意の有界集合に対する上限，下限の存在，または，(ii) 任意の Dedekind 切断に対する端点の存在．

[2] 一様完備性は，任意の平行移動で不変でない Dedekind 切断には端点があるという条件と同等であり，これは，元の順序体を稠密に含む真拡大順序体が存在しないことと同値である ([13] 及びその引用文献を参照)．

うのが，一つの非構造的な，つまり，構成的理解である．もちろん，この理解が構成的と呼ばれるのは，有理数の構成的理解を含んだ上であるので，その点を確認しておく必要がある．つまり，まず，集合論を仮定することは，完備順序体の理論と同様である．つぎに，自然数を定義する．自然数の 0 は，空集合と同一視し，帰納的に，自然数の $n+1$ は，自然数の 0 から自然数の n を元とする集合と定義する．すると，$n+1=n\cup\{n\}$ のように，1 を加える演算が集合算で定義される．以下帰納的に，自然数の加法が集合算によって定義される．つぎに，負の整数を自然数とマイナス符号（たとえば，空集合で表す）の順序対と定義し，整数の全体を自然数の全体と負の自然数の全体の和集合と定義する．整数の和と積も適当な集合の間の演算として定義される．最後に，二つの整数の順序対に対して，その比が等しいという関係による同値関係を定義し，その同値類を有理数と定義する．また，有理数の演算と順序関係が集合の演算と包含関係を用いて定義される．これらの定義については，島内剛一著「数学の基礎」(日本評論社, 東京, 1971) に詳しい解説がある．

本稿では，量子力学的物理量に対して，作用素環の理論による構造的理解に加えて，上記のような構成的理解のための理論構築について解説する．実数の構成が，集合論による自然数の定義から出発したように，量子力学的物理量も集合概念に基づいて全く並行的な構成を行うことが可能である．ただし，通常の2値論理の下でこの構成を行えば，通常の実数ができるだけであるから，異なるセマンティクスを持つ論理の下でシンタクティカルに同等な構成を行う．つまり，われわれは，量子論理に従う集合論を展開し，その中で実数の構成を行う．量子論理は，Birkhoff と von Neumann [2] によって提案された量子力学の論理である．ここで，通常の2値論理と量子論理の区別は，そのセマンティクスの違いによっている．2値論理が真か偽の2値の真理値を持つのに対して，量子論理とは，与えられた量子力学系の状態空間を表す Hilbert 空間の閉部分空間を真理値としてとる論理である．

量子集合論は，数学基礎論と量子力学という全く方法の異なる二つの分野を横断する極めて複雑な数学的対象である．その起源は，Cohen [3] による連続体仮説の独立性証明で導入された強制法である．これは，その後の集合論研究の中心的手法になったばかりでなく，数学の他の分野の概念とも結びついて，様々な形の発展がなされてきた．その 1 つの流れに，層の概念と非標準論理に基づく集合概念の結びつきがあり，集合論の Boole 値モデル [1] から，トポス[3]，直観主義的集合論[4] をへて，竹内外史 [25] によって量子集合論が導入された．竹内は，Boole 代数の代わりに Hilbert 空間の閉部分空間からなる束に基づいて，量子集合の全体（普遍類）を Boole 値モデルと同様の方法で構成し，集合論のどのような公理がそこで成立しているかを調べた．その結果，等号の推移律や代入規則が一般には成立しないなど極めて不規則な体系である事が明らかにされたが，同時に内部に多くの Boole 値モデルを含み，そこでは部分モデルとして ZFC 集合論の公理がすべて成り立っている．また，量子集合論の実数と量子物理量が対応していることが示された．最近の研究 [23] では，

---

[3]竹内外史, 層・圏・トポス：現代的集合像を求めて(日本評論社, 東京, 1978年).

[4]竹内外史, 直観主義的集合論（紀伊国屋書店, 東京, 1980年).

ZFC 集合論の定理から量子集合論で成立する命題への移行原理が得られた．さらに，量子集合論の実数に関しては，等号公理が成り立つことが示され，その等号の性質が深く調べられて，量子集合論と量子力学が極めて密接に関係している事が明らかにされた [23].

2 論理

2.1 オーソモジュラー論理

一般に，論理を特徴付ける要素は二つあり，シンタクスとセマンティクスと呼ばれている．たとえば，集合論や実数論などというときは，その理論のシンタクスを問題にし，数学の論理（2値論理)，古典物理学の論理（Boole 代数値論理)，量子力学の論理（量子論理）などというときには，セマンティクスを問題にしている．すると，量子論理のセマンティクスで実数論のシンタクスを展開するとどうなるかということを問題にすることができる．本稿は，量子論理のセマンティクスで実数論のシンタクスを展開すると，量子力学を自然に拡張した理論が得られる．拡張部分は，これまでの量子力学の研究者が踏み込むことをためらっていた物理量の値に関する新しいが自然な解釈を含む．このプラスアルファによって，これまでの量子力学では，解決できない問題，たとえば，「測定とは何か？」というような問題にアプローチすることを目的としている．

数学のすべての定理は，ZFC 集合論（Zermelo-Fraenke の公理系＋選択公理）の定理に還元可能と考えられているので，量子論理に基づく数学を展開するには，量子論理のセマンティクスで集合論のシンタクスを展開すればよい．われわれは，それを通常の数学や古典力学の論理に基づく数学と比較するため，それらすべてを包含するオーソモジュラー論理という非常に一般的な論理から出発する．

完備オーソモジュラー束とは，完備束 $\mathcal{Q}$ で各元 $p \in \mathcal{Q}$ にその直交補元と呼ばれる元 $P^{\perp} \in \mathcal{Q}$ が対応して，次の条件を満たすものである [7]：

(i) $P \le Q$ ならば $Q^{\perp} \le P^{\perp}$,

(ii) $P^{\perp\perp} = P$,

(iii) $P \vee P^{\perp} = 1$ かつ $P \wedge P^{\perp} = 0$,

(iv) $P \le Q$ ならば $P \vee (P^{\perp} \wedge Q) = Q$.

ただし，$0, 1$ は，それぞれ $\mathcal{Q}$ の最小元と最大元を表す．条件 (ii) は2重否定則，条件 (iii) は排中律と呼ばれる．条件 (iv) をオーソモジュラー法則と呼ぶ．

完備オーソモジュラー束を真理値の体系とする論理をオーソモジュラー論理（または，単に量子論理）と呼ぶことにする．これは，2重否定則，排中律，オーソモジュラー法則が成り立つ論理である．数学の命題は一般に真，偽の2値の真理値を持つので，数学の論理のセマンティクスは2値論理であり，2重否定則，排中律，分配法則が成り立つ．ここで，分配法則は，次の関係をいう．

(v) $P \wedge (Q \vee R) = (P \wedge Q) \vee (P \wedge R), \quad P \vee (Q \wedge R) = (P \vee Q) \wedge (P \vee R).$

これは，$\mathcal{Q} = \{0, 1\}$ となる場合のオーソモジュラー論理に対応する．関係 $P \vee (P^{\perp} \wedge Q) = Q$ が成り立つとき，P, Q は可換であるといい，$P \mathrel{\overset{|}{\circ}} Q$ と記す．オーソモジュラー法則は，P から Q が含意されるならば，P と Q は可換であることを意味する．

$\mathcal{A}^{!}$ で部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の 可換子束を表す [7, p. 23]．つまり，

$$\mathcal{A}^{!} = \{P \in \mathcal{Q}(\mathcal{H}) \mid \text{任意の } Q \in \mathcal{A} \text{ に対して } P \mathrel{\overset{|}{\circ}} Q\}.$$

すると，$\mathcal{A}^{!}$ は $\mathcal{Q}$ の完備オーソモジュラー部分束になる．

任意の2元が可換である完備オーソモジュラー束 $\mathcal{B}$ は，完備 Boole 代数であり，分配則を満たす．このとき，論理 $\mathcal{B}$ を Boole 論理とよぶ．$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とし，その上の射影作用素の全体からなり，直交補元が定義された束 $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ は完備オーソモジュラー束である．後述するように，量子力学の論理のセマンティクスは，$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の場合で，これを標準量子論理とよぶ．

$\mathcal{Q}$ の任意の部分集合 $\mathcal{A}$ の交換子を

$$\underline{\vee}(\mathcal{A}) = \bigwedge_{\mathcal{F} \in \mathcal{P}_{\omega}(\mathcal{A})} \ \bigvee_{\alpha : P \to \{-1,1\}} \ \bigwedge_{P \in \mathcal{F}} P^{\alpha(P)},$$

と定義する．ただし，$\mathcal{P}_{\omega}$ は有限部分集合の全体を表す．交換子は，次のように特徴付けられる．

$$\underline{\vee}(\mathcal{A}) = \bigvee\{E \in \mathcal{A}^{!} \mid \text{すべての } P_1, P_2 \in \mathcal{A} \text{ に対して } P_1 \wedge E \mathrel{\overset{|}{\circ}} P_2 \wedge E\}.$$

竹内 [25] は，$\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の場合に，右辺の定義で交換子を導入した．

オーソモジュラー束上の完全加法的確率測度を（統計的）状態とよび，状態 ρ において，真理値が P であるとき，その真理値をもつ命題の成立確率を $\rho(P)$ で定める．

2.2　オーソモジュラー論理における含意

古典論理では，含意接続詞 $\rightarrow$ は，否定と選言を用いて $P \rightarrow Q = (\neg P) \vee Q$ と定義される．量子論理では，いくつかの対応概念が提案されている．Hardegree [6] は，含意接続詞に対する以下の条件を提案した．以下，P, Q はオーソモジュラー論理 $\mathcal{Q}$ の元とする．

(E) $P \rightarrow Q = 1$ と $P \leq Q$ は同値である．

(MP) $P \wedge (P \rightarrow Q) \leq Q$.

(MT) $Q^{\perp} \wedge (P \rightarrow Q) \leq P^{\perp}$.

(LB) $P \mathrel{\overset{|}{\circ}} Q$ ならば $P \rightarrow Q = P^{\perp} \vee Q$.

Kotas [10] の結果を適用すると，$P \rightarrow Q$ を定義する可補束の多項式で上の条件を満たすものは，次の 3 個の可能性に絞られる．

(i) $P \rightarrow_1 Q = P^{\perp} \vee (P \wedge Q)$.

(ii) $P \to_2 Q = (P \vee Q)^{\perp} \vee Q$.

(iii) $P \to_3 Q = (P \wedge Q) \vee (P^{\perp} \wedge Q) \vee (P^{\perp} \wedge Q^{\perp})$.

しかしながら，上のどれを採用するかについてこれまで一般的な合意は得られていない．とはいえ，多数派は (i) の定義で，これは佐々木アローと呼ばれている [26]．量子集合論では，原子命題 $[\![u \in v]\!]$ 及び $[\![u = v]\!]$ の真理値は，含意接続詞の定義に本質的に依存していて，竹内 [25] および文献 [23] では，佐々木アローを選んでいる．

本稿では，次のような一般化含意接続詞を導入する．オーソモジュラー束 $\mathcal{Q}$ 上の2 項演算 $\to$ は，次の条件を満たすとき，一般化含意接続詞と呼ばれる [11].

(i) $P \to Q \in \{P, Q\}^{!!}$.

(ii) $P, Q \,\rotatebox[origin=c]{180}{!}\, E$ ならば $(P \to Q) \wedge E = [(P \wedge E) \to (Q \wedge E)] \wedge E$.

(iii) $\to$ は (LB) を満たす.

以下では，$\to$ は，任意の一般化含意接続詞とする．また，オーソモジュラー束 $\mathcal{Q}$ 上の2 項演算 $\leftrightarrow$ は，$P \leftrightarrow Q = (P \to Q) \wedge (Q \to P)$ で定義される．

2.3 量子論理

$\mathcal{H}$ を Hilbert 空間とする．任意の部分集合 $S \subseteq \mathcal{H}$ の直交補空間を $S^{\perp}$ で表す．$\mathcal{H}$ の閉線形部分空間の全体 $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は包含関係 $M \subseteq N$ に関して完備束になり，その束演算は，$M \wedge N = M \cap N$, $M \vee N = (M \cup N)^{\perp\perp}$, $\bigwedge \mathcal{S} = \bigcap \mathcal{S}$, $\bigvee \mathcal{S} = (\bigcup \mathcal{S})^{\perp\perp}$ で特徴付けられる．また，直交補空間の演算 $M \mapsto M^{\perp}$ により，$\mathcal{C}(\mathcal{H})$ は完備オーソモジュラー束になる [7, p. 65].

$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の有界線形作用素の空間，$\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ を $\mathcal{H}$ 上の射影作用素の全体とする．$\mathcal{R}(A) \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ で $A \in \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の値域の閉包を表し，$\mathcal{P}(M) \in \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ で $M \in \mathcal{C}(\mathcal{H})$ の上への射影作用素を表す．すると，$\mathcal{RP}(M) = M$ および $\mathcal{PR}(P) = P$ が成り立つ．この対応で，$\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ は作用素の順序のもとで $\mathcal{C}(\mathcal{H})$ と束同型である．

束演算による可換性 $P = (P \wedge Q) \vee (P \wedge Q^{\perp})$ は，作用素の可換性 $PQ - QP = 0$ と同等である．$\mathcal{A}'$ で部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ の可換子環（commutant）を表す．$\mathcal{B}(\mathcal{H})$ の単位元を持つ自己共役部分環で $\mathcal{M}'' = \mathcal{M}$ を満たすものを von Neumann 代数 と呼ぶ．$\mathcal{P}(\mathcal{M})$ で von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ の射影作用素の全体を表す．

$\mathcal{H}$ 上の 論理 とは，$\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の部分集合 $\mathcal{Q}$ で $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{!!}$ を満たすものをいう．したがって，$\mathcal{H}$ 上の論理はすべて $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の完備オーソモジュラー部分束である．任意の部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ に対して，$\mathcal{A}^{!!}$ は $\mathcal{A}$ を含む$\mathcal{H}$ 上の最小の論理で $\mathcal{A}$ から生成された論理とよばれる．部分集合 $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ が $\mathcal{H}$ 上の論理であるための必要十分条件は，$\mathcal{H}$ 上のある von Neumann 代数の射影作用の全体と一致することである．

$\mathcal{Q}$ を $\mathcal{H}$ 上の論理とする．部分集合 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$ の交換子 $\underline{\vee}(\mathcal{A})$ は，作用素の交換子（$[A, B] = AB - BA$）を用いて，以下のように特徴付けられる [23]．任意の部分集合

$\mathcal{A} \subseteq \mathcal{Q}$ に対して,

$$\veebar(\mathcal{A}) = \mathcal{P}\{\psi \in \mathcal{H} \mid \text{すべての } A, B \in \mathcal{A}'' \text{ に対して } [A, B]\psi = 0\} \tag{1}$$

が成り立つ.

3　集合

V を ZFC 集合論の普遍類とする. $\mathcal{L}(\in)$ で等号を持つ一階述語理論の言語で, 2項関係記号 $\in$, および, 有界限量記号 $\forall x \in y$, $\exists x \in y$ を持ち, 定項記号を持たないものを表す. 任意のクラス U に対して, $\mathcal{L}(\in, U)$ で U の各元の名前を $\mathcal{L}(\in)$ に付け加えたものを表す.

3.1　オーソモジュラー論理上の集合論

$\mathcal{Q}$ を完備オーソモジュラー束とし, オーソモジュラー論理に基づく集合の全体を次のように定義する. 各順序数 α に対して, $V_\alpha^{(\mathcal{Q})}$ を次のように定義する.

$$V_\alpha^{(\mathcal{Q})} = \{u \mid u : \mathcal{D}(u) \to \mathcal{Q} \text{ かつ } (\exists\beta < \alpha)\ \mathcal{D}(u) \subseteq V_\beta^{(\mathcal{Q})}\}.$$

$\mathcal{Q}$-値集合の全体 $V^{(\mathcal{Q})}$ は

$$V^{(\mathcal{Q})} = \bigcup_{\alpha \in \mathrm{On}} V_\alpha^{(\mathcal{Q})}$$

によって定義される. ここで, On は順序数の全体である.

$V^{(\mathcal{Q})}$ に関する各陳述 (閉論理式) $\phi \in \mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q})})$ に対して $\mathcal{Q}$-値の真理値 $[\![\phi]\!]$ が以下の規則で帰納的に定められる.

1. $[\![u = v]\!] = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)}(u(u') \to [\![u' \in v]\!]) \wedge \bigwedge_{v' \in \mathcal{D}(v)}(v(v') \to [\![v' \in u]\!])$.
2. $[\![u \in v]\!] = \bigvee_{v' \in \mathcal{D}(v)}(v(v') \wedge [\![u = v']\!])$.
3. $[\![\neg\phi]\!] = [\![\phi]\!]^\perp$.
4. $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \wedge [\![\phi_2]\!]$.
5. $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \vee [\![\phi_2]\!]$.
6. $[\![\phi_1 \to \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \to [\![\phi_2]\!]$.
7. $[\![\phi_1 \leftrightarrow \phi_2]\!] = [\![\phi_1]\!] \leftrightarrow [\![\phi_2]\!]$.
8. $[\![(\forall x \in u)\, \phi(x)]\!] = \bigwedge_{u' \in \mathcal{D}(u)}(u(u') \to [\![\phi(u')]\!])$.
9. $[\![(\exists x \in u)\, \phi(x)]\!] = \bigvee_{u' \in \mathcal{D}(u)}(u(u') \wedge [\![\phi(u')]\!])$.
10. $[\![(\forall x)\, \phi(x)]\!] = \bigwedge_{u \in V^{(\mathcal{Q})}} [\![\phi(u)]\!]$.

11. $[\![(\exists x)\,\phi(x)]\!] = \bigvee_{u\in V^{(\mathcal{Q})}} [\![\phi(u)]\!]$.

陳述 ϕ が $V^{(\mathcal{Q})}$ で成立するとは，$[\![\phi]\!] = 1$ となることをいい，$V^{(\mathcal{Q})} \models \phi$ と記す．

各 $v \in V$ に対して，$V^{(\mathcal{Q})}$ においてそれの複製となる $\mathcal{Q}$-値集合 $\check{v}$ を $\check{v} = \{\check{u} |\ u \in v\} \times \{1\}$ によって帰納的に定める．ZFC 集合論の普遍類 V は，対応 $\vee : v \mapsto \check{v}$ で $V^{(\mathcal{Q})}$ に埋め込まれる．次の定理が成り立つ [23].

定理 1 (Δ_0-初等的同値性原理) $\mathcal{L}(\in)$ の任意のΔ_0-式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ と $u_1, \ldots, u_n \in V$ に対して，$\langle V, \in\rangle \models \phi(u_1, \ldots, u_n)$ と $V^{(\mathcal{Q})} \models \phi(\check{u}_1, \ldots, \check{u}_n)$ は同値である．

3.2 量子集合論における可換性

$V^{(\mathcal{Q})}$ の任意の部分集合 S の交換子を

$$\underline{\vee}(S) = \underline{\vee}(L(S)),$$

と定義する．ここで，$L(S) = \bigcup\{L(a) \mid a \in S\}$ とし，$L(a)$ は次のように帰納的に定義する．

$$L(a) = \bigcup_{x\in\mathcal{D}(a)} L(x) \cup \{a(x) \mid x \in \mathcal{D}(a)\}$$

n-項関係記号 $\underline{\vee}(x_0, \ldots, x_n)$ を次の解釈

$$[\![\underline{\vee}(u_0, \ldots, u_n)]\!] = \underline{\vee}(u_0, \ldots, u_n)$$

と共に導入する．

3.3 等号公理

次の定理が成り立つ [25, 23].

定理 2 任意の $u, u', v, v', w \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，次の関係が成立する．

(i) $[\![u = u]\!] = 1$.

(ii) $[\![u = v]\!] = [\![v = u]\!]$.

(iii) $\underline{\vee}(u, v, u') \wedge [\![u = u']\!] \wedge [\![u \in v]\!] \le [\![u' \in v]\!]$.

(iv) $\underline{\vee}(u, v, u') \wedge [\![u \in v]\!] \wedge [\![v = v']\!] \le [\![u \in v']\!]$.

(v) $\underline{\vee}(u, v, w) \wedge [\![u = v]\!] \wedge [\![v = w]\!] \le [\![u = w]\!]$.

竹内 [25] は $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\mathcal{H})$ の場合に，上記の関係が成立することを示し，推移律と代入規則が一般には成立しないことを反例によって示した．

3.4 移行原理

文献 [23] では，有界論理式で表される ZFC の定理から量子集合論で成立する陳述への次の移行原理が示された．

定理 3 (Δ_0 ZFC 移行原理) $\mathcal{L}(\in)$ の任意の Δ_0-式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ と $u_1,\ldots,u_n \in V^{(\mathcal{Q})}$ に対して，ZFC $\vdash \phi(x_1,\ldots,x_n)$（ZFCで証明可能）ならば，

$$V^{(\mathcal{Q})} \models \underline{\vee}(u_1,\ldots,u_n) \to \phi(u_1,\ldots,u_n)$$

が成立する．

以下の略記法を導入する．

$\vec{x} = (x_1,\ldots,x_n), \vec{y} = (y_1,\ldots,y_m)$.

$\forall\vec{x}\,\phi(\vec{x},\vec{y}) = \forall x_1,\ldots,\forall x_n\,\phi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$.

$\exists\vec{x}\,\phi(\vec{x},\vec{y}) = \exists x_1,\ldots,\exists x_n\,\phi(x_1,\ldots,x_n,y_1,\ldots,y_m)$.

$\forall x : \underline{\vee}(x,x_1,\ldots,x_n)\,\phi(x,x_1,\ldots,x_n) = \forall x\,\underline{\vee}(x,x_1,\ldots,x_n) \to \phi(x,x_1,\ldots,x_n)$.

$\exists x : \underline{\vee}(x,x_1,\ldots,x_n)\,\phi(x,x_1,\ldots,x_n) = \exists x\,\underline{\vee}(x,x_1,\ldots,x_n) \wedge \phi(x,x_1,\ldots,x_n)$.

一般の論理式については，次の移行原理が成立する [11].

定理 4 (ZFC移行原理) $\mathcal{L}(\in)$ の任意の Δ_0-式 $\phi(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$ と量化記号の列 $Q_1,\ldots,Q_n$ に対して，

$$\text{ZFC} \vdash Q_1\vec{x}_1,\ldots,Q_n\vec{x}_n\,\phi(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n),$$

ならば，次が成立する．

(i) $V^{(\mathcal{Q})} \models Q_1\vec{x}_1 : \underline{\vee}(\vec{x}_1)\cdots Q_n\vec{x}_n : \underline{\vee}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)\,\phi(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n)$.

(ii) $V^{(\mathcal{Q})} \models Q_1\vec{x}_1,\ldots,Q_n\vec{x}_n\,(\underline{\vee}(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n) \to \phi(\vec{x}_1,\ldots,\vec{x}_n))$

3.5 Boole 代数値集合論

$\mathcal{B}$ を Boole 論理とする．このとき，含意接続詞 $\to$ は一意に定まり，$P \to Q = P^{\perp} \vee Q$ となる．Boole 論理に対する集合論では，次の移行原理が成り立つ．

定理 5 (ZFC 移行原理) $\mathcal{L}(\in)$ の任意の論理式 $\phi(x_1,\ldots,x_n)$ と $u_1,\ldots,u_n \in V^{(\mathcal{B})}$ に対して，ZFC $\vdash \phi(x_1,\ldots,x_n)$ ならば，

$$V^{(\mathcal{B})} \models \phi(u_1,\ldots,u_n)$$

が成立する．

たとえば，CH $\in \mathcal{L}(\in)$ を連続体仮説を表す論理式とすると，これは，ZFC+“$V = L$” という公理系から証明可能で，ZFCと整合的である．一方，$V^{(\mathcal{B})} \models \neg$CH が成立する $\mathcal{B}$ が存在する．このことから，連続体仮説が ZFC から独立である事が導かれる [3, 1].

4 実数

$\mathbf{Q}$ を V の有理数の全体とする．$V^{(\mathcal{Q})}$ において，第 1 節で述べた空集合から有理数までの構成をシンタクティカルに実行することができ，その結果，$V^{(\mathcal{Q})}$ における有理数の集合は $\check{\mathbf{Q}}$ 対応する [25, 23]．一方，$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数の集合が $\check{\mathbf{R}}$ にならない例は，$\mathcal{Q}$ が非原子的 Boole 代数の場合にすでに知られている [24].

実数の定義として，有理数体の Dedekind 切断を採用する．つまり，実数と下組が端点を持たない有理数体の切断の上組を同一視する．よって，「x は実数である」を意味する述語 $\mathbf{R}(x)$ は次のように定義される．

$$
\begin{aligned}
&x \subseteq \check{\mathbf{Q}} \wedge \exists y \in \check{\mathbf{Q}}(y \in x) \wedge \exists y \in \check{\mathbf{Q}}(y \notin x) \\
&\qquad\qquad \wedge \forall y \in \check{\mathbf{Q}}(y \in x \leftrightarrow \forall z \in \check{\mathbf{Q}}(y < z \rightarrow z \in x)).
\end{aligned}
$$

$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数の集合 $\mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ を次のように定義する．

$$
\mathbf{R}^{(\mathcal{Q})} = \{u \in V^{(\mathcal{Q})} |\ \mathcal{D}(u) = \mathcal{D}(\check{\mathbf{Q}}) \text{ かつ} [\![\mathbf{R}(u)]\!] = 1\}.
$$

$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数体 $\mathbf{R}_{\mathcal{Q}} \in V^{(\mathcal{Q})}$ は，

$$
\mathbf{R}_{\mathcal{Q}} = \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})} \times \{1\}
$$

で定義される．

実数 $r \in \mathbf{R}$ の $\mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ における対応物 $\tilde{r} \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ を $\mathcal{D}(\tilde{r}) = \mathcal{D}(\check{\mathbf{Q}})$ かつ，任意の $t \in \mathbf{Q}$ に対して，$\tilde{r}(\check{t}) = [\![\check{r} \le \check{t}]\!]$ で定義する．

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上で（稠密に）定義された閉作用素 A が von Neumann 代数 $\mathcal{M}$ に**アフィリエイト**する（$A \,\eta\, \mathcal{M}$ と表す）とは $\mathcal{M}'$ に属する任意のユニタリ作用素 U に対して，$U^*AU = A$ となることをいう．

A を $\mathcal{H}$ 上で（稠密に）定義された自己共役作用素とし，そのスペクトル分解を $A = \int_{\mathbf{R}} \lambda\, dE^A(\lambda)$ で表す．関係 $A \,\eta\, \mathcal{Q}''$ と $E^A(\lambda) \in \mathcal{Q}$ が任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ について成立することは同値である．$\overline{\mathcal{M}}_{SA}$ で $\mathcal{M}$ にアフィリエイトする自己共役作用素の全体とする．

Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数の射影束 $\mathcal{Q}$ は，完備オーソモジュラー束であり，これを $\mathcal{H}$ 上の論理と呼ぶ．$\mathcal{H}$ 上の論理以下の定理が得られる [23]．

定理 6 $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{H}$ 上の論理とする．任意の $u \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ と $A \in \overline{(\mathcal{Q}'')}_{SA}$ の間の次の関係

(i) 任意の $\lambda \in \mathbf{R}$ に対して $E^A(\lambda) = \displaystyle\bigwedge_{\lambda < r \in \mathbf{Q}} u(\check{r})$,

(ii) 任意の $r \in \mathbf{Q}$ に対して $u(\check{r}) = E^A(r)$,

によって，$V^{(\mathcal{Q})}$ の実数の全体$\mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ と$\mathcal{Q}''$ にアフィリエイトする自己共役作用素の全体 $\overline{(\mathcal{Q}'')}_{SA}$ の間に一対一対応をつけることができる．

さらに，次の定理が成り立つ [23].

定理 7 $\mathcal{Q}$ を $\mathcal{H}$ 上の論理とする．$\mathcal{H}$ 上の自己共役作用素 A に対応する，$V^{(\mathcal{Q})}$ の実数を $\tilde{A}$ とし，区間 I に対応する $V^{(\mathcal{Q})}$ の区間を $\tilde{I}$ とする．このとき，

$$[\![\tilde{A} \in \tilde{I}]\!] = E^A(I).$$

が成り立つ．

5 物理

5.1 古典力学

5.1.1 古典力学の観測命題

古典力学系 $\mathbf{S}$ の相空間を Ω とし，その上の Lebesgue 測度（Liouville 測度）を m，Ω の Borel 集合の全体を $\mathcal{B}(\Omega)$ とし，$\mathcal{B}$ を $\mathcal{B}(\Omega)$ の m による測度代数とする．つまり，$\mathcal{B} = \mathcal{B}(\Omega)/m^{-1}(0)$．これは，完備 Boole 代数である．Birkhoff と von Neumann [2] は，$\mathcal{B}$ を系 $\mathbf{S}$ の論理と呼んだ．Ω 上の Borel 関数を，系 $\mathbf{S}$ の物理量と呼ぶ．以下では，$(a, b] = \{x \in \mathbf{R} \mid a < x \leq b\}$ を区間と呼ぶ．ただし，$a, b \in R$ または $a = -\infty$．系 $\mathbf{S}$ に関する観測命題を次の規則で定める．

(i) f が物理量で I が数直線の区間ならば，式 $f \in I$ は観測命題である．

(ii) ϕ, ϕ' が観測命題ならば，$\neg\phi, \phi \wedge \phi', \phi \vee \phi'$ も観測命題である．

(iii) 規則 (i), (ii) によって観測命題とされたものだけが，観測命題である．

規則 (i) において，$f \in I$ は f の値が I に属すると解釈され，これは，原子命題と呼ばれる．規則 (ii) において，$\neg\phi, \phi \wedge \phi', \phi \vee \phi'$ は，“not ϕ”, “ϕ and ϕ'”, “ϕ or ϕ'” と解釈される．

Ω の元を状態と呼び，状態 $\omega \in \Omega$ と観測命題 ϕ に対して，ω で ϕ が真である事を意味する関係 $\omega \Vdash \phi$ を次の規則で定める．

(i) $\omega \Vdash f \in I \Leftrightarrow f(\omega) \in I$

(ii) $\omega \Vdash \neg\phi \Leftrightarrow \omega \Vdash \phi$ ではない．

(iii) $\omega \Vdash \phi \wedge \phi' \Leftrightarrow \omega \Vdash \phi$ かつ $\omega \Vdash \phi'$．

(iv) $\omega \Vdash \phi \vee \phi' \Leftrightarrow \omega \Vdash \phi$ または $\omega \Vdash \phi'$．

観測命題 ϕ の真理値 $[\![\phi]\!]_0$ を

$$[\![\phi]\!]_0 = \{\omega \in \Omega \mid \omega \Vdash \phi\}/m^{-1}(0)$$

によって定まる $\mathcal{B}$ の元とする．$\mathcal{B}$ は可算鎖条件を満たすので，$\mathcal{B}$ 上の統計的状態，つまり，完全加法的測度は，$\mathcal{B}$ 上の可算加法的確率測度と一致し，$\mathcal{B}(\Omega)$ 上の m に関して絶対連続な確率測度に対応する．これを系 $\mathbf{S}$ の統計的状態と呼ぶ．系 $\mathbf{S}$ の統計的状態 P において，観測命題 ϕ が生起する確率を $P(\{\omega \in \Omega \mid \omega \Vdash \phi\})$ で定義する．

5.1.2 古典力学の Boole 代数値集合論への埋め込み

以上の関係は，Boole 代数値集合論の命題とその真理値を用いて表すことができる．まず，$\mathcal{H} = L^2(\Omega, m)$ として，各 Borel 関数 f に対して，$\mathcal{H}$ 上の掛け算作用素 M_f が定まり，有界な M_f の全体 $\mathcal{M}$ は，$L^\infty(\Omega, m)$ と同型な $\mathcal{H}$ 上の von Neumann 代数になり，物理量の全体は，$\mathcal{M}$ にアフィリエイトする自己共役作用素の全体に対応する．その射影作用素の全体は，$\mathcal{B}$ と同型である．したがって，定理 6 から，系 **S** の物理量 f の全体と $V^{(\mathcal{B})}$ の実数 $\tilde{f}$ の全体が 1 対 1 に対応する．

このことから，次の規則ですべての観測命題 ϕ に対して $V^{(\mathcal{B})}$ に関する陳述 $\tilde{\phi}$ を対応させることができる．

(i) "$\widetilde{f \in I}$"="$\tilde{f} \in \tilde{I}$"
(ii) "$\widetilde{\neg\phi}$"="$\neg\tilde{\phi}$"
(iii) "$\widetilde{\phi \wedge \phi'}$"="$\tilde{\phi} \wedge \tilde{\phi}'$"
(iv) "$\widetilde{\phi \vee \phi'}$"="$\tilde{\phi} \vee \tilde{\phi}'$"

このとき，定理 7から 任意の区間 I に対して，

$$[\![f \in I]\!]_0 = [\![\tilde{f} \in \tilde{I}]\!]$$

が成り立ち，上の規則より，任意の観測命題に対して，

$$[\![\phi]\!]_0 = [\![\tilde{\phi}]\!]$$

が成り立つ．

系 **S** の統計的状態 P, 物理量 $f_1, \ldots, f_n$，区間 $I_1, \ldots, I_n$ に対して，対応する $\mathcal{B}$ の統計的状態 $\tilde{P}$ において，$V^{(\mathcal{B})}$ 内の実数 $\tilde{f}_j$ の値が区間 $\tilde{I}_j$ に属するという命題の真理確率は，

$$\begin{aligned}
\Pr\{\tilde{f}_1 \in \tilde{I}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_n \in \tilde{I}_n \| \tilde{P}\} &= \tilde{P}([\![\tilde{f}_1 \in \tilde{I}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{f}_n \in \tilde{I}_n]\!]) \\
&= \tilde{P}([\![\tilde{f}_1 \in \tilde{I}_1]\!] \wedge \cdots \wedge [\![\tilde{f}_n \in \tilde{I}_n]\!]) \\
&= P(f_1^{-1}(I_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(I_n))
\end{aligned}$$

より，物理量 $f_1, \ldots, f_n$ の結合確率分布に一致する．

5.2 量子力学

5.2.1 量子力学の公理系

以下で，von Neumann [27] による量子力学の公理系（QM1, QM2, QM3 と名付ける）を導入する．

QM1. （状態と観測可能量の表現）量子力学系 **S** には状態空間と呼ばれる Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ が対応し，**S** の（統計的）状態は $\mathcal{H}$ 上の密度作用素（トレースが 1 の正値作用素）

で定義され，S の観測可能量は $\mathcal{H}$ 上で稠密に定義された自己共役作用素で定義される．S の（統計的）状態 ρ が $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ となる $\mathcal{H}$ の単位ベクトル ψ をもつとき，系 S は（ベクトル）状態 ψ にあるという．

$E^A(\lambda)$ を自己共役作用素 A に属する単位の分解とし，区間 $I = (a, b]$ に対して，

$$E^A(I) = E^A(b) - E^A(a),$$

と定義する．ただし，$E^A(-\infty) = 0$ とする．二つの観測可能量（または，自己共役作用素）A, B が可換（$A \mathrel{\underset{\circ}{|}} B$ と表す）とは，すべての $E^A(\lambda)$ とすべての $E^B(\mu)$ が可換であることをいう．

QM2. （Born の統計公式）互いに可換な観測可能量 $A_1, \ldots, A_n$ の値が統計的状態 ρ において区間 $I_1, \ldots, I_n$ に属する確率は

$$\mathrm{Tr}[E^{A_1}(I_1) \cdots E^{A_n}(I_n)\rho]$$

で与えられる．

ここで，

$$\mu_\rho^{A_1,\ldots,A_n}(I_1 \times \ldots \times I_n) = \mathrm{Tr}[E^{A_1}(I_1) \cdots E^{A_n}(I_n)\rho]$$

とおくと，$\mu_\rho^{A_1,\ldots,A_n}$ は $\mathbf{R}^n$ 上の確率測度に拡張でき，これを観測可能量 $A_1, \ldots, A_n$ の状態 ρ における結合確率分布と呼ぶ．

QM3. （時間発展の公式）時刻 t_0 から $t_0 + \tau$ までハミルトニアン H をもつ孤立した量子力学系 S の時刻 t の状態を $\rho(t)$ とすると，

$$\psi(t_0 + \tau) = U(\tau)\rho(t_0)U(\tau)^\dagger$$

をみたす．ただし，$U(\tau) = \exp\dfrac{\tau H}{i\hbar}$.

5.2.2 量子観測命題

量子力学系 S の状態空間を $\mathcal{H}$ とし，その上の射影作用素の全体を $\mathcal{Q}(\mathcal{H})$ を系 S の論理と呼ぶ．系 S に関する観測命題を次の規則で定める．

(i) A が物理量で I が数直線の区間ならば，式 $A \in I$ は観測命題である．

(ii) ϕ, ϕ' が観測命題ならば，$\neg\phi, \phi \wedge \phi', \phi \vee \phi'$ も観測命題である．

(iii) 規則 (i), (ii) によって観測命題とされたものだけが，観測命題である．

規則 (i) において，$A \in I$ は A の値が I に属すると解釈され，これは，原子命題と呼ばれる．規則 (ii) において，$\neg\phi, \phi \wedge \phi', \phi \vee \phi'$ は，“not ϕ”, “ϕ and ϕ'”, “ϕ or ϕ'” と解釈される．

前節の結果から，Hilbert 空間 $\mathcal{H}$ を状態空間とする量子力学系の観測可能量と $V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ の実数が 1 対 1 に対応することが示された．このことから，量子力学の観測命題を量子集

合論の陳述として表現して，量子力学を量子集合論に帰着させられることが期待される．$\mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))})$ の陳述に対する確率解釈によれば，状態 ψ における陳述 ϕ の成立確率が $\Pr\{\phi\|\psi\} = \|[\![\phi]\!]\psi\|^2$ で定義された．以下では，この解釈が量子力学と整合的であり，量子力学の観測命題がその確率解釈も含めて，量子集合論の陳述で表現されることを示す

5.2.3 観測命題の真偽

ベクトル状態 $\psi \in \mathcal{H}$ と観測命題 ϕ に対して，ψ で ϕ が真である事を意味する関係 $\psi \Vdash \phi$ を次の規則で定める．以下で，$\mathcal{R}$ は作用素の値域を表す．

(i) $\psi \Vdash A \in I \Leftrightarrow \psi \in \mathcal{R}[E^A(I)]$.

(ii) $\psi \Vdash \neg\phi \Leftrightarrow \psi' \Vdash \phi$ となるすべての ψ' に対して，$\psi \perp \psi'$.

(iii) $\psi \Vdash \phi_1 \wedge \phi_2 \Leftrightarrow \psi \Vdash \phi_1$ かつ $\psi \Vdash \phi_2$.

(iv) $\psi \Vdash \phi_1 \vee \phi_2 \Leftrightarrow \psi \Vdash \neg(\neg\phi_1 \wedge \neg\phi_2)$.

原子命題を別とすると，古典力学と量子力学の違いは，否定の真理値にある．

そこで，観測命題 ϕ の真理値を射影作用素によって，

$$[\![\phi]\!]_0 = \mathcal{P}\left(\left\{\psi \in \mathcal{H} \mid \psi \neq 0\text{ならば}\frac{\psi}{\|\psi\|} \Vdash \phi\right\}\right)$$

と定義する．すると，観測命題 ϕ の真理値は以下の規則をみたすことがわかる．

(i) $[\![A \in I]\!]_0 = E^A(I)$.

(ii) $[\![\neg\phi]\!]_0 = [\![\phi]\!]_0^{\perp}$.

(iii) $[\![\phi_1 \wedge \phi_2]\!]_0 = [\![\phi_1]\!]_0 \wedge [\![\phi_2]\!]_0$.

(iv) $[\![\phi_1 \vee \phi_2]\!]_0 = [\![\phi_1]\!]_0 \vee [\![\phi_2]\!]_0$.

5.2.4 量子力学の量子集合論への埋め込み

次の規則ですべての観測命題 ϕ に対して $V^{(\mathcal{B})}$ に関する陳述 $\tilde{\phi}$ を対応させることができる．

(i) “$\widetilde{A \in I}$”=“$\tilde{A} \in \tilde{I}$”

(ii) “$\widetilde{\neg\phi}$”=“$\neg\tilde{\phi}$”

(iii) “$\widetilde{\phi \wedge \phi'}$”=“$\tilde{\phi} \wedge \tilde{\phi}'$”

(iv) “$\widetilde{\phi \vee \phi'}$”=“$\tilde{\phi} \vee \tilde{\phi}'$”

定理7から 任意の区間 I に対して，

$$[\![A \in I]\!]_0 = [\![\tilde{A} \in \tilde{I}]\!]$$

が成り立ち，上の規則より，任意の観測命題に対して，

$$[\![\phi]\!]_0 = [\![\tilde{\phi}]\!]$$

が成り立つことが導かれる.

系 $\mathbf{S}$ の状態 ρ に対して，量子論理の状態 $\tilde{\rho}$ が

$$\tilde{\rho}(P) = \mathrm{Tr}[P\rho]$$

によって定まる. Gleason の定理より，$\dim(\mathcal{H}) > 2$ ならばこれらは 1 対 1 に対応する. 系 $\mathbf{S}$ の状態 ρ，物理量 $A_1, \ldots, A_n$，区間 $I_1, \ldots, I_n$ に対して，対応する量子実数 $\tilde{A}_j$ の値が区間 $\tilde{A}_j$ に属するという命題の状態 $\tilde{\rho}$ における真理確率は，

$$\begin{aligned}
\Pr\{\tilde{A}_1 \in \tilde{I}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{A}_n \in \tilde{I}_n \| \tilde{\rho}\} &= \mathrm{Tr}[[\![\tilde{A}_1 \in \tilde{I}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{A}_n \in \tilde{I}_n]\!]\rho] \\
&= \mathrm{Tr}[[\![\tilde{A}_1 \in \tilde{I}_1]\!] \wedge \cdots \wedge [\![\tilde{A}_n \in \tilde{I}_n]\!]\rho] \\
&= \mathrm{Tr}[E^{A_1}(I_1) \wedge \cdots \wedge E^{A_n}(I_n)\rho]
\end{aligned}$$

となる. 特に. 物理量 $A_1, \ldots, A_n$ が可換であれば，

$$\Pr\{\tilde{A}_1 \in \tilde{I}_1 \wedge \cdots \wedge \tilde{A}_n \in \tilde{I}_n \| \tilde{\rho}\} = \mathrm{Tr}[E^{A_1}(I_1) \cdots E^{A_n}(I_n))\rho]$$

となって結合確率分布の公式が導かれる.

以上から，量子力学系の観測可能量と量子集合論のモデル $V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ における実数との間に自然な一対一対応があり，可換な物理量の結合確率分布に関する公理は，$V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))}$ の実数に関する陳述とその真理確率というより上位の原理から導かれることが示された.

6　測定

量子力学において測定という概念は，状態や観測可能量(物理量) の概念と同様，最も基本的な概念の一つである. にもかかわらず，測定に関しては，まだ，定まった見方がなされていない問題が多い.

たとえば，次の問題を考えよう.

問題1：量子物理量 A の測定とは何か？

測定とは，被測定量 A の値とメータ M の値を一致させることであると述べられることがある. つまり，

被測定量：$A = \sum_{m\in\mathbf{R}} m|m\rangle\langle m|$ on $\mathcal{H}$,

メータ：$M = \sum_{m\in\mathbf{R}} m|m\rangle\langle m|$ on $\mathcal{K}$,

装置の初期状態：$\sigma = |\xi\rangle\langle\xi|$

ならば，測定は次のユニタリ変換で表される.

$$U : |m\rangle|\xi\rangle \mapsto |m\rangle|m\rangle, \tag{2}$$

$$U : (\sum_m c_m|m\rangle)|\xi\rangle \mapsto \sum_m c_m|m\rangle|m\rangle. \tag{3}$$

このような関係が実現すれば，メータを見るだけで，被測定量の値がわかるので，対象の物理量の問題は測定器のメータの問題に還元されるといわれてきた [28].

しかし，実際には，上の関係を満たさない測定が存在する．よく知られているように，上の測定は，von Neumann [27] の反復可能性仮説「同一の対象に対して，同じ物理量を2回引き続いて測定すれば，2回とも同じ値が得られる」を満たす．にもかかわらず，たとえば，光子数計数器による理想的な光子数測定の記述では，このことは成り立たない．

実は，上のユニタリ変換は，測定直後の被測定量 A の値と測定直後のメータ M の値を一致させていることがわかる．しかし，測定はあくまでも測定によって乱される前の値を知るのが目的で，測定によって変えられた値を問題にしているわけではない．このことを考慮すれば，「測定とは，測定直前の被測定量 A の値と測定直後のメータ M の値を一致させることである」というべきである．つまり，測定は次のユニタリ変換で表される．

$$U : |m\rangle|\xi\rangle \;\mapsto\; |\phi_m\rangle|m\rangle, \tag{4}$$
$$U : (\sum_m c_m|m\rangle)|\xi\rangle \;\mapsto\; \sum_m c_m|\phi_m\rangle|m\rangle. \tag{5}$$

特に，$\phi_m = \phi$ の場合も許される．

$$U : |m\rangle|\xi\rangle \;\mapsto\; |\phi\rangle|m\rangle, \tag{6}$$
$$U : (\sum_m c_m|m\rangle)|\xi\rangle \;\mapsto\; |\phi\rangle\sum_m c_m|m\rangle. \tag{7}$$

従来の見方では，測定は対象と装置の間にエンタングルメントを構成すると考えられてきたが，この例のように，それは測定に必要な条件ではない．

これまでの議論をまとめると次のようになる．与えられた A, M, ψ, ξ に対して，U が対象と測定装置の間の相互作用による状態変化を表すために，式 (2), (3) は，従来，必要条件と考えられてきたが，反復可能仮説を満たさない測定の存在から，これは，正しくない．測定とは，測定直前の被測定量 A の値と測定直後のメータ M の値を一致させることであるという観点からは，式 (4) が必要十分であることは明らかである．

一方，式 (5) は，式 (4) が任意の固有状態で成り立つならば，ユニタリ変換の線形性の帰結である．よって，与えられた A, M, ξ に対して，U が任意の初期状態 ψ において対象と測定装置の間の相互作用による状態変化を表すために式 (4) が必要条件であるということになる．しかし，対象の初期状態 が被測定量の固有状態の重ね合わせの場合に，この式で，U が測定直前の被測定量 A の値と測定直後のメータ M の値を一致させているかどうかは，直ちに明らかというわけではない．

従来，反復可能性仮説の下で，測定過程とは，対象と装置の間のどのような相互作用かという問題は，観測問題と呼ばれて，様々な議論がなされてきた．この場合には，論文 [15] において，与えられた A, M, ξ に対して U が任意の初期状態 ψ において対象と測定装置の間の相互作用による状態変化を表すために，式 (4) が必要十分であるということを示した．

本稿では，観測問題を反復可能性仮説を仮定しないで考察し，以上のような見方に立って，最も一般的な測定過程というものを数学的に定義し，そのうちどの測定過程が量子物理量 A の測定を表すかを数学的に特徴付けるという問題を考えよう．

測定過程の数学的な定義は次のように与えられる [12]．

定義：ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で表現される量子力学系に対する測定過程とは，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ 上の密度作用素 ρ，$\mathcal{H}\otimes\mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 U，$\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素 M からなる 4 つ組 $(\mathcal{K},\sigma,U,M)$ のことであり，その測定値の確率分布と測定による状態変化は

$$\begin{aligned}
\Pr\{\mathbf{x}\in I\|\rho\} &= \mathrm{Tr}[U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger(I\otimes E^A(I))],\\
\rho\mapsto\rho_{\{\mathbf{x}\in I\}} &= \Pr\{\mathbf{x}\in I\|\rho\}^{-1}\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho\otimes\sigma))U^\dagger(I\otimes E^A(I))]
\end{aligned}$$

で与えられる．

するとわれわれの問題は，次のようになる．

問題2：どの測定過程 $(\mathcal{K},\xi,U,M)$ が状態 ρ における量子物理量 A の測定を表すか？

状態 ρ における量子物理量 A の測定を表すために測定過程 $(\mathcal{K},\xi,U,M)$ が満たすべき一つの必要条件が, 次のように与えられる．

必要条件 1： Born の統計公式によれば，測定過程 $(\mathcal{K},\xi,U,M)$ が状態 ρ で物理量 A の測定を表すとすれば，測定値 $\mathbf{x}$ の確率分布は，

$$\Pr\{\mathbf{x}\in I\|\rho\}=\mathrm{Tr}[E^A(I)\rho]$$

を満たす必要がある．ただし，I は数直線上の任意の Borel 集合を表す．

すべての測定過程は，

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}(I)\rho &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho\otimes\sigma)U^\dagger(I\otimes E^A(I))],\\
\Pi(I) &= \mathcal{I}^*(I)1=\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U^\dagger(I\otimes E^A(I))U(I\otimes\sigma)]
\end{aligned}$$

によって，インストルメント $\mathcal{I}$ と POVM Π を定義し，測定値の確率分布と測定による状態変化は，

$$\begin{aligned}
\Pr\{\mathbf{x}\in I\|\rho\} &= \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(I)\rho]=\mathrm{Tr}[\Pi(I)\rho],\\
\rho\mapsto\rho_{\{\mathbf{x}\in I\}} &= \frac{\mathcal{I}(I)\rho}{\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(I)\rho]}
\end{aligned}$$

で与えられる [12]．

すべてのインストルメントは，

$$\Pi(I)=\mathcal{I}(I)^*1$$

によって，POVM Π を定義し [4]，POVM が同じなら任意の状態に関する測定値の確率分布が同じであるから，どのPOVMが量子物理量 A の測定を表すかを考えてみよう．

必要条件2： 測定過程 $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ が状態 ρ で物理量 A の測定を表すとすれば，その POVM Π が任意の I に対して，

$$\mathrm{Tr}[\Pi(I)\rho] = \mathrm{Tr}[E^A(I)\rho]$$

を満たす必要がある．

上の条件は，与えられた状態における測定に関する条件であるが，この条件が任意の状態について成り立つことを要請すると，次の条件が得られる．

必要条件3： 測定過程 $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ が任意の状態で物理量 A の測定を表すとすれば，その POVM Π が任意の I に対して，

$$\Pi(I) = E^A(I)$$

を満たす必要がある．

この条件は，与えられた測定過程が任意の状態で物理量 A の測定を表すということの定義と考えられてきたが [12]，この定義の正当化についてそれ以上の議論はなされていない．

するとわれわれの問題は，次のように述べることができる．

問題3：必要条件2は十分か？十分でないなら必要十分条件を示せ？

問題4：必要条件3は十分か？十分でないなら必要十分条件を示せ？

7　物理量の値の同一性

前節の議論から，われわれの問題は「測定とは，測定直前の被測定量 A の値と測定直後のメータ M の値を一致させることである」という命題を数学的に表現することに帰着する．この問題には，「測定直後の被測定量 A の値と測定直後のメータ M の値を一致させる」という命題にない困難がある．つまり，測定直後の被測定量と測定直後のメータは互いに交換可能な作用素で表現されるが，測定直前の被測定量と測定直後のメータは，一般に非可換な作用素で表されるからである．

量子力学では，非可換な物理量の値の関係を考えることに困難がある．つまり，Kochen-Specker の定理 [8] などで明らかなように，あらかじめすべての物理量に値が割り当てられていることを仮定して，ある二つの物理量についてそれらが等しいと言う言い方をすることは禁じられている．

それでは，二つの物理量の値が同一であるとは，どういうことを意味するのであろうか．初めに，類似の概念を古典物理学のケースで考えてみよう．古典物理学の対象の物理量は，Kolmogorov の確率論 [9] の確率変数であらわされる．Kolmogorov の確率論では，対象は確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で表される．Ω は標本空間と呼ばれる集合，$\mathcal{F}$ は事象系と呼ばれる Ω の部分集合からなる σ 集合体，P はその上の確率測度である．この確率空間における確率変数とは，Ω 上の $\mathcal{F}$ 可測関数である．$\mathcal{F}$ の元は事象と呼ばれ，事象 A の生起確率が $P(A)$

で与えられる．事象の間には論理演算が定義され，not A，A and B，A or B はそれぞれ事象 A^c（A の補集合），$A \cap B$，$A \cup B$ で表される．また，確率変数 f の値が数直線の Borel 集合 I に属するという事象 $f \in I$ は，$f^{-1}(I) = \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \in I\}$ で表される．以下では，事象 A_1 and $\cdots$ and A_n の生起確率を $\Pr\{A_1, \ldots, A_n \| P\}$ であらわす．確率変数 $f_1, \ldots, f_n$ の結合確率分布とは，R^n 上の Borel 確率測度 $\mu_P^{f_1,\ldots,f_n}$ で，条件

$$\mu_P^{f_1,\ldots,f_n}(I_1 \times \cdots \times I_n) = \Pr\{f_1 \in I_1, \cdots, f_n \in I_n \| P\}$$

で定められるものであり，

$$\mu_P^{f_1,\ldots,f_n}(I_1 \times \cdots \times I_n) = P(f_1^{-1}(I_1) \cap \cdots \cap f_n^{-1}(I_n))$$

で与えられる．

対象が古典物理系の場合，Ω はその相空間に，$\mathcal{F}$ はその上の Borel 集合の全体に，P は系の統計的状態に対応する．たとえば，多粒子系の Gibbs 状態はこのような P で表される．また，古典物理系の物理量は，相空間上の Borel 関数に対応し，これは，確率空間上の確率変数に他ならない．

与えられた確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ で二つの確率変数 f, g が同一の値を持つとは，文字どおり確率1で両者の値が一致することで，

$$P\{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = g(\omega)\} = 1 \tag{8}$$

と表すことができる．この関係は，至る所で同一であるという関係を用いて，

$$f(\omega) = g(\omega) \quad \text{P-a.e.} \tag{9}$$

と表すこともできる．また，結合確率分布を用いて，

$$\mu_P^{f,g}(\{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}) = 1 \tag{10}$$

と表すこともできる．

つぎに，量子力学において，並行的な考え方をしてみよう．量子力学では，系に対して相空間を対応させることはできないが，代わりに状態空間と呼ばれる Hilbert 空間が対応する．量子力学系に関する事象とは，その系のある物理量の測定によってその生起が決定できる命題のことで，状態空間上の射影作用素によって表現される．事象 E が密度作用素 ρ で表される状態で生起する確率は，$\mathrm{Tr}[E\rho]$ で与えられる．物理量は，状態空間上の自己共役作用素で表され，物理量 A の値が数直線上の Borel 集合 I に属するという事象は，$E^A(I)$ に対応する．物理量 $A_1, \ldots, A_n$ が互いに可換なとき，任意の状態 ρ に対して，$A_1, \ldots, A_n$ の結合確率分布 $\mu_\rho^{A_1,\ldots,A_n}$ は，次式で定義される $\mathbf{R}^n$ 上の確率測度である．

$$\mu_\rho^{A_1,\ldots,A_n}(I_1 \times \cdots, \times I_n) = \mathrm{Tr}[E^{A_1}(I_1) \cdots E^{A_n}(I_n)\rho]. \tag{11}$$

関係 (8), (9), (10) のいずれも，量子力学の場合に直接的な一般化をすることは困難である．しかし，物理量 A, B が互いに可換であるときは，上述の結合確率分布を用いて，関係 (10) のアナロジーを用いることができる．つまり，A, B が可換なときは，

$$\mu_\rho^{A,B}(\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x = y\}) = 1 \tag{12}$$

であるときに，状態 ρ で A, B が同一の値を持つと考えることができる．

つまり，「2つの物理量の値の同一性」を古典論理で扱おうとすると，同一性をいうまえに2つの物理量の値が同時に実在性を持つことを前提にする必要があり，非可換量の値の同一性を扱うのに困難が生じる．そこで，量子論理に基づく数学を構築して，その中で「物理量の値」と「それらの一致」を扱うのがわれわれの方針である．以下では，物理量の値の実在性の問題を明らかにし，その上で，量子論理に基づく「2つの物理量の値の同一性」の概念を考察する．

8 量子観測可能量の値の実在性と量子実数の可換性

量子力学では，個々の観測可能量は原理的に幾らでも正確に測定が可能で，その測定値の確率分布が前述の Born の統計公式で理論的に予言される．また，複数個の可換な観測可能量の値は，原理的には，一個の観測可能量の値に帰着されるので，それらもやはり，同時に測定が可能で，その測定値の結合確率分布が前述の Born の統計公式で理論的に予言される．しかし，非可換な観測可能量の間の結合確率分布が一般には定義されないので，観測可能量の値が同時に実在すると解釈することには困難がある．ある種の観測可能量の値の実在論的解釈の不可能性および同時測定不可能性は，一般に不確定性原理と呼ばれているが，その関係を正確に表現する問題はまだ十分に解明されていない．観測可能量の値の実在性と量子集合論に関する最近の研究成果 [11] は，以下のようにまとめることができる．

与えられた状態 ρ のもとで，物理量 A と B の値が同時に実在すると考えられる（実在論的解釈を持つ）ための必要十分条件は，任意のコンパクトな台を持つ実連続関数 f, g と任意の実多項式 p に対して，有界な物理量 $p(f(A)+g(B))$ の量子力学から定まる期待値が A と B に対応する2つの変数の結合確率分布で表現できること，つまり，$\mathbf{R}^2$ 上の確率測度 $\mu_\rho^{A,B}$ が存在して

$$\mathrm{Tr}[p(f(A)+g(B))\rho] = \int_{\mathbf{R}^2} p(f(x)+g(y))\, d\mu_\rho^{A,B}(x,y)$$

が成立することを意味する．この関係は，$\omega = (x,y)$ という隠れた変数が存在して，A と B の値を同時に決定していると解釈できる．この様な隠れた変数は，A, B に依存しているので，文脈依存的であるといわれる．このような確率測度 $\mu_\rho^{A,B}$ が存在するとき，それを状態 ρ における A と B の結合確率分布と呼ぶ．$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ のとき，$\mu_\psi^{A,B}$ と記す．

A と B が可換であるときには，

$$\mu_\rho^{A,B}(I \times J) = \mathrm{Tr}[E^A(I)E^B(J)\rho]$$

によって結合確率分布が得られる．一般の場合の結合確率分布の存在に関しては，以下の特徴付けが得られる．

定理 8 任意の観測可能量の対 A, B および状態 ρ について，以下の条件はすべて同値である．

(i) 状態 ρ における A と B の結合確率分布が存在する．

(ii) 任意の $\lambda, \lambda' \in \mathbf{R}$ について $[E^A(\lambda), E^B(\lambda')]\rho = 0$ が成り立つ．

(iii) $\mathrm{Tr}[\underline{\vee}(\tilde{A}, \tilde{B})\rho] = 1$.

(iv) 任意の区間 I, J に対して，$\mu(I \times J) = \Pr\{\tilde{A} \in \tilde{I} \wedge \tilde{B} \in \tilde{J} \| \rho\}$ をみたす $\mathbf{R}^2$ 上の確率測度 μ が存在する．

(v) A, B で生成される *von Neumann* 代数 $\{E^A(\lambda), E^B(\lambda') \mid \lambda, \lambda' \in \mathbf{R}\}''$ の ρ による *GNS* 表現は可換である．

上の条件が満たされるとき，任意の区間 I, J に対して，

$$\mu_\rho^{A,B}(I \times J) = \Pr\{\tilde{A} \in \tilde{I} \wedge \tilde{B} \in \tilde{J} \| \rho\}$$

が成り立つ．

上の定理は二つの観測可能量について述べたが，定理を一般の観測可能量の集まりに拡張することは容易である．上の定理と ZFC 移行原理を合わせると，ある状態でいくつかの観測可能量の値が実在論的解釈を持つことと，それらの観測可能量に関する ZFC の定理がすべてその状態で成立することは同等である．

9 量子観測可能量の値の同一性と量子実数の相等関係

A, B が共にスペクトルが有限集合である観測可能量の時，観測命題 $A = B$ を

$$(A \in I_1 \leftrightarrow B \in I_1) \wedge \cdots \wedge (A \in I_n \leftrightarrow B \in I_n)$$

という観測命題で定義することができる．ただし，$I_j = (x_j - \epsilon, x_j + \epsilon]$，かつ $\{x_1, \ldots, x_n\}$ は A, B それぞれのスペクトルの合併集合を表し，$\epsilon = \min_{j,k=1}^n |x_i - x_j|/2$ とする．

5.2.4 節から，観測命題 $A = B$ に対して，$\mathcal{L}(\in, V^{(\mathcal{Q}(\mathcal{H}))})$ の陳述 $\widetilde{A = B}$ が存在して，

$$\Pr\{\widetilde{A = B} \| \psi\} = \Pr\{A = B \| \psi\}$$

が成り立つ．一方，量子集合論には，集合の同等性が定義されているので，陳述 $\tilde{A}=\tilde{B}$ の真理値 $[\![\tilde{A}=\tilde{B}]\!]$ が定義されている．以下で示す結果によると，実際に陳述 $\widetilde{A=B}$ は，陳述 $\tilde{A}=\tilde{B}$ と同値であり，

$$[\![\tilde{A}=\tilde{B}]\!]=\mathcal{P}\{\psi\in\mathcal{H}\mid \text{任意の } r\in\mathbf{Q} \text{ に対して } E^A(r)\psi=E^B(r)\psi\}$$

が成立することが得られる．また，$\psi\Vdash\tilde{A}=\tilde{B}$ ならば，A と B は ψ で可換であり，同時測定可能であり，同時測定の測定値は常に一致していることが導かれる．したがって，観測命題 $A=B$ は，「A と B が同時測定可能で測定値が一致する」という操作的な意味を持つことが結論される．さらに，一般の A,B に対しては，このことを従来の観測命題によって表現することはできないが，量子集合論では，この観測命題を $\tilde{A}=\tilde{B}$ という集合論の命題として表現できることが結論される．このように，量子集合論によって従来の量子力学の解釈を拡張することが可能である．

量子力学の標準的な解釈によれば，原子的観測命題は観測可能量 A と区間 I に対して，$\tilde{A}\in\tilde{I}$ という形のものに限られていた [27]．しかし，量子集合論によって，量子力学の解釈をより一般の観測可能命題に拡張することを可能にすることが期待できる．ここでは，そのような解釈の拡張の一つを導入しよう．

任意の可換な観測可能量 A と B および任意の状態 ψ に対して，ψ における A と B の結合確率分布 $\mu_\psi^{A,B}$ が $\mathbf{R}^2$ 上の確率測度として定義され，任意の区間 I および J に対して，

$$\mu_\psi^{A,B}(I\times J)=\Pr\{\tilde{A}\in\tilde{I}\wedge\tilde{B}\in\tilde{J}\|\psi\}=\|E^A(I)E^B(J)\psi\|^2$$

を満たす．このとき，

$$\Pr\{\tilde{A}\in\tilde{I}\wedge\tilde{B}\in\tilde{J}\|\psi\}=0$$

が共通部分を持たない任意の区間 I,J について成り立つことは，A と B が状態 ψ で同一の値を持つことを意味すると考えられる．この条件は，更に，次の条件のそれぞれとも同値である．

(i) $\mu_\psi^{A,B}(\{(a,b)\in\mathbf{R}^2\mid a=b\})=1$.

(ii) $\mu_\psi^{A,B}(\{(a,b)\in\mathbf{R}^2\mid a\neq b\})=0$.

(iii) 共通部分を持たない任意の区間 I,J について，$\mu_\psi^{A,B}(I\times J)=\mu_\psi^{A,B}((I\cap J)\times\mathbf{R})=\mu_\psi^{A,B}(\mathbf{R}\times(I\cap J))$.

従って，値の同一性は任意の可換な観測可能量の対に対しては，明らかな概念である．しかし，結合確率分布は可換な観測量の間にしか定義されていないから，この概念を任意の非可換な観測可能量の対に拡張することは自明でない．

最近の研究 [20, 22] でこの問題に関して満足できる結論が得られた．ここでは，この問題を量子集合論から見直してみよう．量子集合論では，可換とは限らない一般の A と B が状態 ψ で同一の値を持つことは，$\psi\Vdash\tilde{A}=\tilde{B}$，またはそれと同値な $\psi\Vdash(\forall r\in\check{Q})r\in\tilde{A}\leftrightarrow r\in\tilde{B}$

で表されると考えるのが自然である．問題は，この条件が量子力学の解釈として実験事実などから経験的妥当性を持つかということである．これに関して，以下の定理が成立する [23].

量子実数 $u, v \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ に関する $\mathcal{Q}$-値の相等関係 $[\![u = v]\!]$ は次のように特徴付けられる [23].

定理 9 任意の $u, v \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ と状態 ψ に対して次の条件はすべて同値である．

(i) $\psi \Vdash u = v$.

(ii) 任意の $x \in \mathbf{Q}$ について $u(\check{x})\psi = v(\check{x})\psi$.

(iii) 任意の $x, y \in \mathbf{Q}$ について $u(\check{x})v(\check{y})\psi = v(\check{x} \wedge \check{y})\psi$.

(iv) 任意の $x, y \in \mathbf{Q}$ について $\langle u(\check{x})\psi, v(\check{y})\psi \rangle = \|v(\check{x} \wedge \check{y})\psi\|^2$.

物理量 A, B と状態 ρ に対して，その値域 $\mathrm{ran}(\rho)$ を含む最小の A-不変かつB-不変閉部分空間を$\mathcal{C}(A, B, \rho)$ で表し，A, B と ρ で生成される巡回部分空間と呼ぶ．$\mathcal{C}(A, \rho) = \mathcal{C}(A, 1, \rho)$ とおき，A と ρ で生成される巡回部分空間と呼ぶ．$\psi \in \mathcal{H}$ に対して，$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ のときは，$\mathcal{C}(A, B, \psi)$ と記す．上の結果から，物理量の値の同一性に関する次の結果が得られる．

定理 10 $\mathcal{H}$ 上の任意の観測可能量 A, B および任意の状態 $\psi \in \mathcal{H}$ に対して，次の条件はすべて同値である．

(i) $\mathrm{Tr}[[\![\tilde{A} = \tilde{B}]\!]\rho] = 1$.

(ii) 任意の $r \in \mathbf{Q}$ に対して，$E^A(r)\rho = E^B(r)\rho$.

(iii) 任意の有界連続関数 f に対して，$f(A)\rho = f(B)\rho$.

(iv) 共通部分を持たない任意の区間 I, J に対して，$\mathrm{Tr}[E^A(I)E^B(J)\rho] = 0$.

(v) 状態 ρ における A, B の結合確率分布 $\mu_\rho^{A,B}$ が存在して，

$$\mu_\rho^{A,B}(\{(a, b) \in \mathbf{R}^2 \mid a = b\}) = 1$$

を満たす．

(vi) 任意の状態 $\phi \in \mathcal{C}(A, \rho)$ と任意の区間 I に対して，

$$\|E^A(I)\phi\| = \|E^B(I)\phi\|$$

が成り立つ．

(vii) $\mathcal{C}(A, \rho) = \mathcal{C}(B, \rho) = \mathcal{C}(A, B, \rho)$ かつ $\mathcal{C}(A, B, \rho)$ 上で $A = B$ が成立する．

条件 (v) から，A と B が状態 ψ で同時測定可能で，常に同一の測定値を与えることが導かれるので，A, B が同一の値を持つことを経験的に正当化している．従って，量子集合論の実数の相等関係は量子力学において物理量の測定値の同一性として，経験的に検証可能であることが導かれる．

次の定理は$\mathcal{Q}$-値の相等関係が $V^{(\mathcal{Q})}$ の実数に関しては，同値関係であることを示している [23].

定理 11 $V^{(\mathcal{Q})}$ で次の関係が成立する.

(i) $[\![(\forall u \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})u = u]\!] = 1$.

(ii) $[\![(\forall u, v \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})u = v \to v = u]\!] = 1$.

(iii) $[\![(\forall u, v, w \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})u = v \wedge v = w \to u = w]\!] = 1$.

(iv) $[\![(\forall v \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})(\forall x, y \in v)x = y \wedge x \in v \to y \in v]\!] = 1$.

(v) $[\![(\forall u, v \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})(\forall x \in u)x \in u \wedge u = v \to x \in v]\!] = 1$.

次の定理から，$V^{(\mathcal{Q})}$ の実数に関しては，相等性から可換性が導かれることが示される [23].

定理 12 任意の $u_1, \ldots, u_n \in \mathbf{R}^{(\mathcal{Q})}$ について，

$$[\![u_1 = u_2 \wedge \cdots \wedge u_{n-1} = u_n]\!] \leq \underline{\vee}(u_1, \ldots, u_n).$$

が成立する.

これより，$V^{(\mathcal{Q})}$ における実数に関しては，Δ_0-式に対する代入規則が成立することが導かれる [23].

定理 13 (Δ_0-代入規則) $\mathcal{L}(\in)$ の Δ_0-式 $\phi(x_1, \ldots, x_n)$ に対して，

$$\begin{aligned}&[\![(\forall u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_n \in \mathbf{R}_{\mathcal{Q}})\\ &\qquad (u_1 = v_1 \wedge \cdots \wedge u_n = v_n) \to (\phi(u_1, \ldots, u_n) \leftrightarrow \phi(v_1, \ldots, v_n))]\!] = 1\end{aligned}$$

が成立する.

10 量子集合論による測定理論の基礎付け

物理量の値の同一性に関する理論ができたので，それを測定理論に応用しよう.

測定過程の数学的な定義を再掲すると次のようになる. ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ で表現される量子力学系に対する測定過程とは，ヒルベルト空間 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ 上の密度作用素 ρ, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 U, $\mathcal{K}$ 上の自己共役作用素 M からなる 4 つ組 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ のことであり，その測定値の確率分布と測定による状態変化は

$$\begin{aligned}\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} &= \mathrm{Tr}[U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}(I \otimes E^A(\Delta))],\\ \rho \mapsto \rho_{\{\mathbf{x} \in \Delta\}} &= \Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\}^{-1}\mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho \otimes \sigma))U^{\dagger}(I \otimes E^A(\Delta))]\end{aligned}$$

で与えられる. すべての測定過程は，

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(\Delta)\rho &= \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U(\rho \otimes \sigma)U^{\dagger}(I \otimes E^A(\Delta))],\\ \Pi(\Delta) &= \mathcal{I}^*(\Delta)1 = \mathrm{Tr}_{\mathcal{K}}[U^{\dagger}(I \otimes E^A(\Delta))U(I \otimes \sigma)]\end{aligned}$$

によって，インストルメント $\mathcal{I}$ と POVM Π を定義し，測定値の確率分布と測定による状態変化は，

$$\begin{aligned}\Pr\{\mathbf{x} \in \Delta \| \rho\} &= \mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho] = \mathrm{Tr}[\Pi(\Delta)\rho], \\ \rho \mapsto \rho_{\{\mathbf{x}\in\Delta\}} &= \frac{\mathcal{I}(\Delta)\rho}{\mathrm{Tr}[\mathcal{I}(\Delta)\rho]}\end{aligned}$$

で与えられる [12].

われわれの問題は，どの測定過程 $(\mathcal{K}, \xi, U, M)$ が状態 ρ における量子物理量 A の測定を表すかということであり，それを測定とは測定直前の非測定量の値を測定後のメータの値として再現することであるという上位の定義から導くことである．したがって，前節の結果から，次の定義が得られる．

定義： 測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ は，

$$\mathrm{Tr}[[\![A\,\widetilde{\otimes}\,1 = U^\dagger(1\,\widetilde{\otimes}\, M)U]\!]\rho\otimes\sigma] = 1$$

を満たすとき，状態 ρ において（確率 1 で）物理量 A を測定するという．

定理 10 から，$\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ かつ $\sigma = |\xi\rangle\langle\xi|$ の場合，

$$\langle E^A(I)\psi\otimes\xi, U^\dagger(1\otimes E^M(J))U\psi\otimes\xi\rangle = 0$$

が成立することと同等である．

一般の場合，次の定理が得られる [22].

定理 14 *POVM* Π をもつ測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ に関して，以下の条件はすべて同値である．

(i) 測定過程 $(\mathcal{K}, \sigma, U, M)$ が状態 ρ で観測量 A を測定する．

(ii) 交わりのない任意の区間 I, J に対して，

$$\mathrm{Tr}[E^A(I)\Pi(J)\rho] = 0$$

が成り立つ．

(iii) 任意の区間 I に対して，

$$E^A(I)\rho = \Pi(I)\rho$$

が成り立つ．

(iv) 任意の有界ボレル関数 f に対して，

$$f(A)\rho = \int f(x)\Pi(dx)\rho$$

が成り立つ．

(v) 状態 ρ における A, B の結合確率分布 $\mu_\rho^{A,B}$ が存在して，

$$\mu_\rho^{A,B}(\{(x,x) \in \mathbf{R}^2 \mid x \in \mathbf{R}\}) = 1$$

を満たす．

(vi) 任意のベクトル状態 $\phi \in \mathcal{C}(A,\rho)$ に対して *Born* の公式が成立する．すなわち，任意のベクトル状態 $\phi \in \mathcal{C}(A,\rho)$ と任意の区間 I に対して，

$$\mathrm{Tr}[\Pi(I)\rho] = \mathrm{Tr}[E^A(I)\rho]$$

が成り立つ．

上の定理から，測定過程が物理量 A を測定するか否かは，測定による状態変化によらずに，測定の確率分布を決定する POVM で決定される．また，測定過程が与えられた状態 ρ で物理量 A を測定するためには，その状態で Born の公式が成立することだけでは，不十分で A と ρ で生成される巡回部分空間に属するすべての状態で Born の公式が成立することが必要かつ十分である．一方，測定過程が任意の状態で物理量 A を測定するための必要十分条件は，任意の状態で Born の公式が成立することであり，これは，測定過程の POVM が非測定量の単位の分解 E^A と一致することである．

11　同時測定可能性と不確定性原理

従来の不確定性原理の理解によると，二つの物理量が可換であること，二つの物理量の値が実在論的解釈を持つこと，二つの物理量が同時測定可能であることの3条件は互いに同値であると考えられていた．しかし，最近の研究により，非可換な物理量の同時測定可能性が明らかにされ，定説は改められつつある．第8節では，初めの2条件が一般に同値であることを示したので，本節では，二つの物理量の同時測定可能性について簡単に議論する．

物理量 A, B をもつ量子力学系の状態空間を $\mathcal{H}$ とする．A と B が状態 ψ で同時測定可能であるとは，Hilbert 空間 $\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ の単位ベクトル ξ, $\mathcal{H} \otimes \mathcal{K}$ 上のユニタリ作用素 U, $\mathcal{K}$ 上の物理量（稠密な定義域を持つ自己共役作用素）M，および，二つの Borel 関数 f, g が存在して，$A \otimes I$ と $U^\dagger(I \otimes f(M))U$, $B \otimes I$ と $U^\dagger(I \otimes g(M))U$ が状態 $\psi \otimes \xi$ でそれぞれ共に同一の値を持つこと，すなわち，

$$\psi \otimes \xi \Vdash (A \otimes I)^\Upsilon = (U^\dagger(I \otimes f(M))U)^\Upsilon \tag{13}$$

$$\psi \otimes \xi \Vdash (B \otimes I)^\Upsilon = (U^\dagger(I \otimes g(M))U)^\Upsilon \tag{14}$$

が成立することである．

上の条件が満たされれば，測定の相互作用を介して，M を測定することにより，A と B のいずれの測定値をも得ることができるので，A と B が同時測定可能であると考えられる．スピンの異なる成分のように典型的に非可換な物理量についても，ある状態で同時測定可能であることを示すことができる．そのような物理量の値は実在論的解釈を持たないが，どちらの測定値も一方のみの測定値としては，量子力学の予言と整合的である．

それでは，不確定性原理はこのような同時測定の可能性に対して，どのような制約を与えているのだろうか．条件 (13), (14) が成立しない場合も含めて，それぞれの測定誤差（平方根平均２乗誤差）$\epsilon(A)$，$\epsilon(B)$ を

$$\epsilon(A) = \|(A \otimes I)\psi \otimes \xi - (U^{\dagger}(I \otimes f(M))U)\psi \otimes \xi\| \tag{15}$$

$$\epsilon(B) = \|(B \otimes I)\psi \otimes \xi - (U^{\dagger}(I \otimes g(M))U)\psi \otimes \xi\| \tag{16}$$

と定義する．条件 (13), (14) がみたされているならば，$\epsilon(A) = \epsilon(B) = 0$ となる．このとき，次の関係が普遍的に成立する [17, 14, 16, 18, 19].

$$\epsilon(A)\epsilon(B) + \sigma(A)\epsilon(B) + \epsilon(A)\sigma(B) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi, [A, B]\psi\rangle|. \tag{17}$$

ここで，$\sigma(A)$, $\sigma(B)$ はそれぞれの標準偏差で，$\sigma(A) = \|A\psi - \langle\psi, A\psi\rangle\psi\|$ 等と定義される．

スピンの異なる成分のように，互いに非可換な物理量においては，すべての状態で $[A, B]\psi \neq 0$ となっているが，$\langle\psi, [A, B]\psi\rangle = 0$ となる状態が存在して，そのような状態で同時測定が可能である．また，従来，

$$\epsilon(A)\epsilon(B) \geq \frac{1}{2}|\langle\psi, [A, B]\psi\rangle|. \tag{18}$$

という関係が一般に成立するという誤解が流布していて，$\langle\psi, [A, B]\psi\rangle \neq 0$ ならば，$\epsilon(A) \neq 0$ かつ $\epsilon(B) \neq 0$ で，一方を小さくすると一方が必然的に大きくなると考えられていたが，これは誤りで，$\langle\psi, [A, B]\psi\rangle \neq 0$ であっても，$\epsilon(A) = 0$ または $\epsilon(B) = 0$ となる同時測定が可能であり，誤差の積 $\epsilon(A)\epsilon(B)$ は幾らでも小さくできることが明らかになった [17, 14, 16, 18, 19, 21].

以上のように量子力学の基礎に関しては，未だに解明されていない問題が残されていて，量子集合論はそれらの問題を考える上で重要な役割を果たすことが期待される．

参考文献

[1] J. L. Bell, *Boolean-valued models and independence proofs in set theory*, 2nd ed., Oxford University Press, Oxford, 1985.

[2] G. Birkhoff and J. von Neumann, *The logic of quantum mechanics*, Ann. Math. **37** (1936), 823–845.

[3] P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis I*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **50** (1963), 1143–1148.

[4] E. B. Davies and J. T. Lewis, *An operational approach to quantum probability*, Commun. Math. Phys. **17** (1970), 239–260.

[5] A. M. Gleason, *Measures on the closed subspaces of a Hilbert space*, J. Math. Mech. **6** (1957), 885–893.

[6] G. M. Hardegree, *Material implication in orthomodular (and Boolean) lattices*, Notre Dame J. Formal Logic **22** (1981), 163–182.

[7] G. Kalmbach, *Orthomodular lattices*, Academic, London, 1983.

[8] S. Kochen and E. P. Specker, *The problem of hidden variables in quantum mechanics*, J. Math. Mech. **17** (1967), 59–87.

[9] A. N. Kolmogorov, *Grundbegriffe der wahrscheinlichkeitrechnung*, Springer, Berlin, 1933, [*Foundations of the Theory of Probability*, Second English Edition, (Chelsea, New York, 1950)].

[10] J. Kotas, *An axiom system for the modular logic*, Studia Logica **21** (1967), 17–38.

[11] M. Ozawa, *Quantum set theory over orthomodular logic*, in preparation.

[12] ———, *Quantum measuring processes of continuous observables*, J. Math. Phys. **25** (1984), 79–87.

[13] ———, *Scott incomplete Boolean ultrapowers of the real line*, J. Symbolic Logic **60** (1995), 160–171.

[14] ———, *Physical content of Heisenberg's uncertainty relation: limitation and reformulation*, Phys. Lett. A **318** (2003), 21–29.

[15] ———, *Quantum state reduction and the repeatability hypothesis*, Ann. Japan Ass. Phil. Sci. **11** (2003), 107–121.

[16] ———, *Uncertainty principle for quantum instruments and computing*, Int. J. Quant. Inf. **1** (2003), 569–588.

[17] ———, *Universally valid reformulation of the Heisenberg uncertainty principle on noise and disturbance in measurement*, Phys. Rev. A **67** (2003), 042105–(1–6).

[18] ———, *Uncertainty relations for joint measurements of noncommuting observables*, Phys. Lett. A **320** (2004), 367–374.

[19] ———, *Uncertainty relations for noise and disturbance in generalized quantum measurements*, Ann. Phys. (N.Y.) **311** (2004), 350–416.

[20] ———, *Perfect correlations between noncommuting observables*, Phys. Lett. A **335** (2005), 11–19.

[21] ———, *Noise and disturbance in quantum measurements and operations*, Quantum Information and Computation IV (E. J. Donkor, A. R. Pirich, and H. E. Brandt, eds.), Proc. SPIE, vol. 6244, SPIE Int. Soc. Opt. Eng., 2006, pp. 62440Q (1–9).

[22] ———, *Quantum perfect correlations*, Ann. Phys. (N.Y.) **321** (2006), 744–769.

[23] ———, *Transfer principle in quantum set theory*, J. Symbolic Logic **72** (2007), 625–648.

[24] G. Takeuti, *Two applications of logic to mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 1978.

[25] ———, *Quantum set theory*, Current Issues in Quantum Logic (New York) (E. G. Beltrametti and B. C. van Fraassen, eds.), Plenum, 1981, pp. 303–322.

[26] A. Urquhart, *Review*, J. Symbolic Logic **48** (1983), 206–208.

[27] J. von Neumann, *Mathematische grundlagen der quantenmechanik*, Springer, Berlin, 1932.

[28] E. P. Wigner, *The problem of measurement*, Am. J. Phys. **31** (1963), 6–15.